Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

A 45-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

6 martie 2004

CLASA A XII-A

Subiectul 1

Fie $n \geq 2$ un întreg, şi $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Notăm

$$S_r = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}_2) \mid \operatorname{rang} A = r\}.$$

a) Să se arate că pentru orice $A \in S_n$ şi $B \in S_r$, AB se află în S_r;
b) Să se calculeze suma $\displaystyle\sum_{X \in S_r} X$.

Subiectul 2

Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

pentru orice $g : [0,1] \to \mathbf{R}$, continuă şi nederivabilă. Să se arate că f este o funcţie constantă.

Subiectul 3

Inelul A are următoarele proprietăţi:
i) elementul unitate 1_A are ordin p număr prim;
ii) există $B \subset A$ cu p elemente cu proprietatea: *oricare ar fi* $x, y \in A$, *există* $b \in B$ *care verifică* $xy = byx$.
Să se arate că
a) pentru $k \in \mathbf{Z}$, $(k, p) = 1$, elementul $k \cdot 1_A$ este inversabil;
b) $1_A \in B$;
c) A este inel comutativ.

Subiectul 4

Fie $a, b \in (0,1)$ şi $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă astfel încât

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{ax} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{bx} f(t)\mathrm{d}t, \text{ pentru orice } x \in [0,1].$$

a) Să se arate că dacă $a + b < 1$ atunci $f = 0$.
b) Să se arate că dacă $a + b = 1$ atunci f este constantă.

Timp de lucru 3 *ore.*
Toate subiectele sunt obligatorii.